TUTORIAL NÚMEROS COMPLEJOS

Se trata de un tipo de notación matemática muy utilizada fundamentalmente en la representación de la señal vibratoria en mantenimiento, si bien puede presentar otras aplicaciones, concretamente el apoyo para el cálculo de las relaciones trigonométricas, también de amplia utilización en el sector ya no sólo a nivel de monitorizado de condición sino para cálculos y diseños de ingeniería.

NOMENCLATURA

Los números complejos constituyen un conjunto de datos C, producto de 2 espacios de datos de números reales. Simbólicamente:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$$

De tal modo que cualquier número complejo ***c*** puede representarse:

1. $c = (a, b)$
2. $c = a + ib$

siendo ***a*** la parte real y ***b*** la parte imaginaria. El número i, en principio, vamos a decir que es un convenio para la representación de ese plano imaginario complejo.

OPERACIONES

Suma

- $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Conmutativa y Asociativa

Producto

- $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$
- Conmutativa y Asociativa

Suma Factorial

- $\omega * (Z_1 + Z_2 + \cdots .. + Z_n) = \omega * Z_1 + \omega * Z_2 + \cdots .. + \omega * Z_n)$

Resta

- $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$

Cociente

- $\frac{f+i\,g}{a+ib} = \frac{(af+bg)+i\,(ag-bf)}{a^2+b^2}$

CURIOSIDAD

Por todo lo anterior se puede decir que:

1. $(a, b) = a + (0{,}1) * b$
2. $(0{,}1) = i$
3. $(0{,}1) * (0{,}1) = (-1{,}0)$

Esta última expresión demuestra que $i = \sqrt{-1}$, algo de habitual conocimiento por otro lado.

CONJUGACIÓN Y MÓDULO

Para cada número complejo

$$z = x + i\, y$$

existe un conjugado de valor:

$$z^* = x - i\, y$$

Definiéndose el módulo como:

$$|z| = \sqrt{z * z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propiedades:

- $|Z * \omega| = |Z| * |\omega|$

ARGUMENTO

Este concepto deriva de la propia representación cartesiana de un número complejo puesto que cada pareja de números reales (a, b) existe un único ángulo ϕ que verifica que:

$$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

y

$$cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Se define ese valor ϕ como argumento principal siempre que se encuentre comprendido en el intervalo $[-\pi, +\pi]$.

Propiedades:

- $\arg(Z * \omega) = \arg(Z) + arg(\omega)$

REPRESENTACIÓN TRIGONOMÉTRICA

El argumento abre mucho el margen de maniobra con los números complejos pues permite realizar diferentes operaciones con ellos. Para ello se ha de entender que el número complejo:

$$Z = \cos \phi + i\ \sin \phi$$

tiene precisamente por argumento ϕ , lo que permite establecer una representación alternativa de cualquier número complejo. Obsérvese que el $|Z| = 1$, por lo que si se nos diera el dato de representar un complejo de módulo $|\omega|$ y argumento ψ bastaría con utilizar la siguiente nomenclatura:

$$|\omega|(\cos \psi + i\ \sin \psi)$$

Curiosidades

De lo anterior se podría concluir que dos números complejos de módulo la unidad y argumentos respectivos ψ y φ podrían multiplicarse como sigue:

$$(\cos \psi + i\ \sin \psi) * (\cos \varphi + i\ \sin \varphi)$$

Debiendo ser esa expresión igual a:

$$\sin(\psi + \varphi) + i \cos(\psi + \varphi)$$

Obteniéndose vía el desarrollo que:

$$\sin(\psi + \varphi) = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi$$

$$\cos(\psi + \varphi) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi$$

Que son las fórmulas generales para calcular el seno y coseno de una suma de ángulos.

Si se verificara que $\varphi = \psi$ entonces estaríamos hablando de las fórmulas:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \text{ (1)}$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi \quad \text{(2)}$$

ecuaciones habituales para el cálculo del coseno y seno del doble de un ángulo.

Con esta metodología podéis demostrar y obtener buena parte de las relaciones necesarias para la trigonometría; seguro que ya te has lanzado a probarlo.